Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

सोचने-विचारने के कौशलों का शिक्षण

एक प्रयोगात्मक तरीका

पद्मप्रिया शिराली

At Right Angles

A Resource for School Mathematics

व्यवहारिक रूप से देखें तो हर मानवीय गतिविधि में सोचने–विचारने के कौशलों का इस्तेमाल निहित होता है। तो फिर सोचने–विचारने के कौशल क्या हैं? ये वे महत्त्वपूर्ण मानसिक प्रक्रियाएँ हैं जो हम करते हैं : चीजों का वर्गीकरण करना, गुणधर्मों का अवलोकन करना, जानकारी का संकेतीकरण करना, तुलना करना, निर्णय लेना, निष्कर्ष निकालना और समस्याएँ हल करना। सोचने–विचारने के कौशलों को सोचने–विचारने के कैनवास के बुनियादी अंग के रूप में देखा जा सकता है। सोचने–विचारने के इन कौशलों को मोटेतौर पर दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है : निम्न कोटि सोच–विचार कौशल और उच्च कोटि सोच–विचार कौशल।

यदि हम गणित शिक्षण के सन्दर्भ में देखें तो पाएँगे कि अधिकांश स्कूलों में हमारा झुकाव निम्न कोटि सोच–विचार कौशलों पर ज्यादा होता है और उच्च कोटि सोच–विचार कौशलों पर पर्याप्त ध्यान नहीं देते हैं। उदाहरण के लिए हमारा ज्यादा ध्यान जानकारियों जैसे गुणन के तथ्यों, गिनती व हिसाब के कौशल, प्रक्रियाओं, सूत्रों और परिभाषाओं को याद करने पर होता है। हम बच्चों के सामने ऐसी समस्याएँ कम ही रखते हैं जिनमें उन्हें सम्बन्धों और पैटर्नों को पहचानने, सम्बन्ध स्थापित करने, एक ही सवाल को अलग–अलग पद्धतियों से हल करने, निष्कर्ष निकालने व नतीजे का पूर्वानुमान लगाने, नए सवाल पूछने व खोज करने, सामान्यीकरण करने आदि की जरूरत पड़े। इसके साथ ही हमारी अधिकांश पाठ्यपुस्तकें इन उच्च कोटि सोच–विचार कौशलों के शिक्षण में कोई खासा योगदान नहीं देतीं। इनमें दिए गए ज्यादातर सवाल प्रक्रिया उन्मुख, दोहराव वाले होते हैं और इन्हें एक यांत्रिक तरीके से हल किया जा सकता है। इनमें तर्क–वितर्क व विचार करने, जाँच करने, खोजने, अनुमान लगाने की गुंजाइश कम ही होती है। न इनमें चुनौतियों व रचनात्मकता के लिए ही ज्यादा जगह होती है। बच्चों का ऐसे सवालों से सामना कराना जरूरी है जिनमें उच्च कोटि के सोच–विचार कौशलों की जरूरत हो। सभी बच्चे दिलचस्प गणितीय सवालों को हल करने की चुनौती और आनन्द को अनुभव करने का अधिकार रखते हैं।

जिन बच्चों में यह कौशल विकसित हो पाते हैं वे विभिन्न प्रकार की स्थितियों में सम्बन्धों, पैटर्नों और संरचनाओं को देख पाते हैं। वे इन पैटर्नों का सामान्यीकरण करने और इनका वर्णन करने में सक्षम होते हैं। वे जानकारी को व्यवस्थित करने और उसका वर्गीकरण करने में भी सक्षम होते हैं। वे मात्रात्मक और स्थानिक सम्बन्धों के बारे में तार्किक और प्रतीकात्मक रूप से सोच पाते हैं।

शिक्षक किस तरह बच्चों को ऐसे अवसर दें कि बच्चे इन उच्च कोटि सोच–विचार कौशलों को विकसित कर सकें व इनका इस्तेमाल कर सकें? शिक्षकों को ऐसे कौशलों का एक समूह पहचानना होगा, ऐसी समस्याएँ चुननी होंगी जो इन कौशलों का इस्तेमाल करने में योगदान दें। बच्चों से ऐसे सवाल पूछने होंगे जो उन्हें ऐसे ही अलग–अलग कौशलों को विकसित करने में मदद करें।

इस लेख में मैंने सोच–विचार के कौशलों के एक उपसमूह को विकसित करने पर ध्यान केन्द्रित किया है जिनमें से कुछ कौशल प्राथमिक स्कूल के अन्तर्गत आने वाले विषयों से जुड़े हैं। लेकिन यह लेख इससे कहीं ज्यादा के बारे में है। यह बच्चे की अवधारणाओं की समझ को पुख्ता करता है और गणितीय सोच में निहित क्रम व तर्क को समझने में मदद करता है। मैंने समस्याओं का एक समूह चुना है जो मैं अपने शिक्षण के दौरान इस्तेमाल करती थी। इन समस्याओं के लिए कई अलग–अलग सोच–विचार कौशलों की जरूरत पड़ती है जिनमें संख्याओं से व्यवहार कौशल, ज्यामितीय कल्पना, तार्किक विचार और प्रयोग शामिल हैं। दी गई समस्याओं को सोच के कई स्तरों पर सुलझाया जा सकता है। जो कौशल और रणनीतियाँ एक परिस्थिति में काम आते हों जरूरी नहीं कि दूसरी परिस्थिति में भी वही काम आएँ।

की–वर्ड : *सोचने–विचारने के कौशल, तर्क, विचार,खोज–पड़ताल, पैटर्न, अनुमान*

प्रतिविधियाँ

इन सवालों के सन्दर्भ में शिक्षकों से कुछ बातें :

- **क्रियाकलाप** : शुरुआत में सभी बच्चे इनमें से ज्यादातर क्रियाकलाप करने में सक्षम होते हैं। इनमें से कई क्रियाकलापों को बाद में विस्तार दिया जा सकता है और उनमें नई चुनौतियाँ जोड़ी जा सकती हैं। बच्चों को सभी सम्भव तरीके खोजने दें। यह बेहद जरूरी है कि उन्हें सवालों को अपने तरीके से हल करने दिया जाए। इन सवालों का जवाब देकर शिक्षक खोजने और परखने के उनके आनन्द को नष्ट कर सकते हैं।
- **समय** : इन सवालों को हल करने के लिए बच्चों को पर्याप्त समय दें। जल्दबाजी न करें। कुछ सवाल बच्चे अकेले हल कर सकते हैं। कुछ को जोड़ों में हल किया जा सकता है और कुछ समस्याओं पर बच्चे 4–4 के समूह में भी काम कर सकते हैं।
- **चयन** : बच्चों को ऐसी समस्याओं का हल करने का प्रयास करने दें जो उन्हें आनन्ददायक लगती हों। इस तरह की समस्याओं को हल करते हुए बच्चों को आनन्द और आत्मविश्वास की अनुभूति होना बेहद जरूरी है। कोई भी समस्या या खोजबीन अपना आकर्षण खो देती है यदि वह समझने में बहुत ज्यादा कठिन हो या फिर उसे बच्चे पर जबरदस्ती थोपा जाए। हालाँकि शिक्षक किसी भी समस्या में बच्चों की रुचि पैदा करने के अलग–अलग तरीके ढूँढ़ सकते हैं।
- **कौशल समूह** : इन समस्याओं को हल करने के लिए जिन कौशलों की जरूरत है वे न तो पूरी तरह उम्र पर निर्भर करते हैं और न ही क्रमिक हैं। इस्तेमाल किए गए कौशलों और रणनीतियों में विभिन्नता को स्वीकार किया जाना चाहिए और उन्हें साझा करना चाहिए व उनकी सराहना करनी चाहिए।
- **निरूपण और सम्प्रेषण** : बच्चों को चर्चा करने और बात करने के लिए प्रेरित करें। उनसे 'यदि ऐसा होता तो क्या होता' वाले सवाल पूछें। अपने जवाबों को चित्रों के रूप में दिखाने और अन्त में अपने जवाबों को अपने सहपाठियों को बताने में उनकी मदद करें। तर्क, अनुमान लगाने और जाँचने, वर्णन करने और संक्षेप में बताने के कौशल को विकसित करने पर ध्यान केन्द्रित करें।
- **प्रमुख सवाल** : मैंने समस्याओं से परिचय कराने के लिए सवालों की एक श्रेणी तैयार की है। कुछ बच्चों को समस्याओं को समझने और उनका हल खोजने के लिए और सवालों की जरूरत पड़ सकती है। हो सकता है कि कुछ बच्चों को अपनी खोज शुरू करने के लिए एक से ज्यादा सवाल की जरूरत नहीं हो। शिक्षक हस्तक्षेप कर सकते हैं यदि उन्हें लगे कि बच्चा कहीं पर अटक गया है।
- **थीम** : मैंने पाँच थीम इस्तेमाल की हैं। इनमें से तीन थीम संख्याओं के व्यवहार कौशल से जुड़ी हैं : सौ चौकोर वाली जाली के साथ जाँच–पड़ताल, जादुई आँकड़े और लापता अंक। दो थीम स्थानिक कौशल से जुड़ी हैं : बिन्दुओं वाले कागज की गतिविधियाँ और टूथपिक जमाने की गतिविधियाँ।

सौ चौकोरों वाली जाली की जाँच–पड़ताल

गतिविधियों के केन्द्रबिन्दु हैं :

- एक छोटे समूह की संख्याओं के बीच के सम्बन्धों पर गौर करना;
- पैटर्नों को खोजने के लिए दिए गए एक समूह की संख्याओं के साथ प्रयोग करना;
- जाँचना कि खोजे गए पैटर्न और सम्बन्ध एक समान स्थितियों में ही होते हैं;
- अलग–अलग आकार के चौकोरों के साथ गतिविधि करके नए सवाल पूछना;
- समान गतिविधि को किन्हीं और स्थितियों में करके देखना;
- एक अलग दिशा से देखना;
- एक व्यवस्थित तरीके से अलग–अलग रास्ते खोजना और जानकारी का लेखा–जोखा रखना।

चित्र 1 देखो।



चित्र 1

गोला लगाई गई (तिरछे में) संख्याओं को देखो। 1, 12, 23,

तुम्हें क्या पैटर्न दिखाई देता है? तिरछे में लिखी अन्य संख्याओं को देखो। 11, 22, 33,..... 21, 32, 43......

क्या तिरछे में लिखी सभी संख्याओं में यही पैटर्न देखने को मिलता है?

चित्र 2 देखो।



चित्र 2

2 by 2 के किसी भी चौकोर की संख्याओं को देखो जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

आड़े में लिखी संख्याओं को जोड़ लो।

अब खड़े में लिखी संख्याओं को जोड़ लो।

तुम्हें क्या योगफल मिलता है?

अब तिरछे में लिखी संख्याओं को जोड़ो। कितना योगफल मिला?

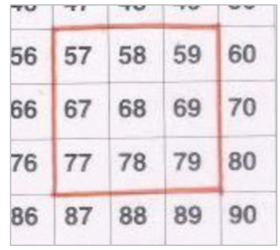
अब संख्याओं की जाली से 2 by 2 का कोई भी और चौकोर चुन लो।

आड़े में लिखी संख्याओं के योगफलों में कितना अन्तर है? क्या तुम्हें इस बार भी उतना ही अन्तर मिला जितना कि पहले चौकोर की आड़ी संख्याओं के योगफलों के बीच मिला था?

क्या खड़े में लिखी संख्याओं के योगफलों में भी ऐसा ही सम्बन्ध देखने को मिलता है? क्या तुम अपनी खोजों के बारे में बता सकते हो?

चित्र 3 देखो।

3 by 3 के किसी भी चौकोर में लिखी संख्याओं को देखो जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



चित्र 3

आड़े में लिखी संख्याओं को जोड़ लो। कितना योगफल मिला?

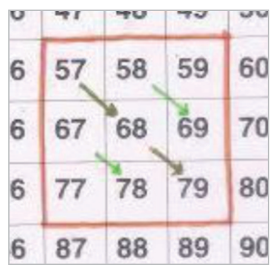
खड़े में लिखी संख्याओं को जोड़ लो। अब क्या योगफल मिला?

क्या 3 by 3 के अन्य चौकोरों के साथ भी ऐसा ही होगा? करके देखो और जाँचो।

चित्र 4 देखो।

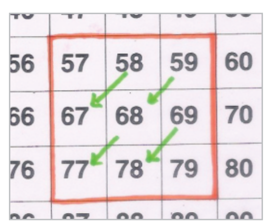
इस चित्र में तिरछे में लिखी संख्याओं को जोड़ो।

कितना योगफल मिला?



चित्र 4

चित्र 4क देखो।



चित्र 4क

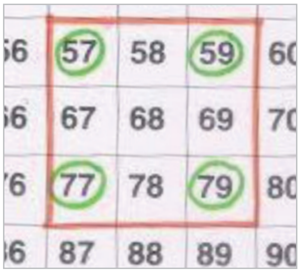
इस चित्र में तिरछे में लिखी संख्याओं को जोड़ो।

कितना योगफल मिला?

क्या 3 by 3 के अन्य चौकोरों में लिखी संख्याओं के साथ भी ऐसा ही होगा? करके देखो और जाँचो।

चित्र 5 देखो।

आमने–सामने के कोनों में लिखी संख्याओं (संख्याओं के जिन जोड़ों पर गोला लगाया गया है) को जोड़ो। क्या नजर आता है?



चित्र 5

बची हुई संख्याओं के बारे में तुम्हारा क्या कहना है? संख्याओं के और किन जोड़ों का योगफल इसके समान होगा?

बीच में लिखी संख्या के बारे में तुम्हें क्या लगता है? क्या इस संख्या और योगफल की संख्या में कोई सम्बन्ध है?

देखो कि क्या जाली में बनने वाले 3 by 3 के किसी भी अन्य चौकोर में यही सम्बन्ध स्थापित होता है।

चित्र 6 देखो।



चित्र 6

अब गुणा के साथ कुछ प्रयोग करके देखते हैं।

आमने–सामने के कोनों में लिखी संख्याओं को गुणा करो। उत्तरों को लिख लो।

3 by 3 के किसी अन्य चौकोर की संख्याओं के साथ भी ऐसा ही करो। उत्तरों को लिख लो। क्या तुम्हें इन गुणनफलों में कोई पैटर्न नजर आता है?

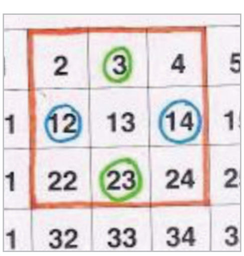
चित्र 7 देखो।

अब चित्र में दिखाए अनुसार संख्याओं के अन्य जोड़ों को गुणा करो और गुणनफलों को लिख लो।

संख्याओं के गुणनफलों के बीच तुम्हें क्या अन्तर देखने को मिला?

3 by 3 के किसी अन्य चौकोर के साथ भी ऐसा ही करके देखो और गुणनफलों की तुलना करो।

चित्र 8 देखो।



चित्र 7

जाली में से कोई भी एक आयताकार टुकड़ा (3 by 4) चुन लो और कोने की चारों संख्याओं पर गोला लगा लो।

संख्याओं के इन जोड़ों के गुणनफलों के बीच तुम्हें क्या–क्या सम्बन्ध दिखाई देते हैं?

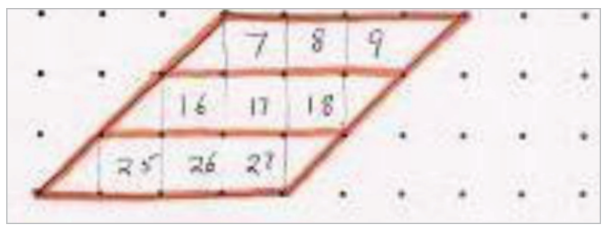
चित्र 9 देखो।



चित्र 8

क्या समान्तर चतुर्भुज (3 by 4) आकृति की जाली लेने पर भी यही सम्बन्ध स्थापित होंगे?

चित्र 10 देखो।



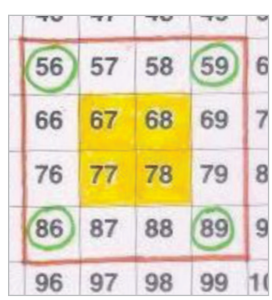
चित्र 9

चित्र में दिखाए अनुसार (4 by 4) का कोई भी एक चौकोर चुन लो। कोने की चारों संख्याएँ जोड़ लो। कुल जोड़ को लिख लो।

बीच की चारों संख्याओं को जोड़ने पर क्या योगफल आता है? क्या तुम संख्याओं की जाली में 2 by 2 का कोई और चौकोर ढूँढ़ सकते हो जिसका योगफल भी समान ही हो? क्या यह सम्बन्ध 4 by 4 के अन्य चौकोरों में भी होगा?

क्या यह सम्बन्ध अन्य आकार के चौकोरों में भी होगा?

चित्र 11 देखो।



चित्र 10

इसे पहले सिर्फ दिमागी तौर पर हल करने की कोशिश करो। बाद में तुम एक जाली के ऊपर दूसरी जाली रखकर अपने उत्तरों की जाँच कर सकते हो।

सौ चौकोरों वाली एक जाली का अनुरेखण (tracing) कर उसे घड़ी की सुई की दिशा में आधा घुमा दो और फिर इसे वास्तविक जाली पर रखो। अब एक ही खाने में आने वाली दोनों सदृश संख्याओं को जोड़ लो। पहली कुछ पंक्तियों में कौन–सी संख्याएँ आती हैं? दूसरी पंक्ति में कौन–सी संख्याएँ आती हैं? क्या यह संख्याएँ समान हैं? क्या होगा यदि तुम अनुरेखित जाली को घड़ी की सुई की दिशा में एक चौथाई (90 अंश पर) घुमा दो तो?



चित्र 11

चित्र 12 देखो।

पूर्ण वर्ग संख्याएँ

संख्याओं की एक जाली में पूर्ण वर्ग संख्याओं को छायांकित करो।

पूर्ण वर्ग संख्याओं को क्रमानुसार लिख लो।

जिस तरह से यह संख्याएँ बढ़ रही हैं क्या तुम्हें उसमें कोई पैटर्न नजर आता है? किस स्तम्भ में केवल एक पूर्ण वर्ग संख्या है? किस स्तम्भ में दो पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? क्यों?

कुछ स्तम्भों में कोई भी पूर्ण वर्ग संख्याएँ क्यों नहीं हैं? इन स्तम्भों की संख्याओं के इकाई के स्थान पर कौन–से अंक हैं? क्या इन अंकों पर खत्म होने वाली संख्याएँ हमेशा अपूर्ण वर्ग संख्याएँ होती हैं?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चित्र 12

संख्याओं वाले एक बोर्ड पर शतरंज के घोड़े की चाल

(यदि जरूरत हो तो घोड़े की चाल का वर्णन करें, देखें https://en.wikipedia.org/wiki/Knight_%28chess%29.]

चित्र 13 देखो।

क्या तुम 1 से लेकर 100 तक शतरंज के घोड़े की चाल के हिसाब से चलकर पहुँच सकते हो? जिन–जिन संख्याओं पर तुम घोड़ा रखते हो यदि उन्हें जोड़ते चलो तो कम से कम और ज्यादा से ज्यादा कितना योगफल होगा?

सम संख्याओं का कम से कम योगफल कितना होगा? विषम संख्याओं का कम से कम योगफल कितना होगा?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चित्र 13

बिन्दुओं वाले कागज पर खोज

इन गतिविधियों का केन्द्र निम्न बातों पर होगा :

- बिन्दुओं वाली सारणी में चौकोरों और त्रिभुजों जैसी आकृतियों की कल्पना करना;
- यह समझना कि सभी चौकोरों में कागज के आधार के समान्तर भुजाएँ नहीं होतीं;
- सर्वांगसमता (समान आकृतियाँ व माप) की समझ को पुख्ता करना;
- एक व्यवस्थित तरीके से गिनती करना;

चित्र 14 देखो।


चित्र 14

अपने बिन्दुओं वाले कागज में 2 by 2 के एक चौकोर को देखो जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। चित्र में कितने चौकोर दिखाई देते हैं? (यहाँ चौकोर से मतलब सभी सम्भावित माप के चौकोरों से हैं)। जवाब होगा 5 (चार चौकोर 1 by 1 माप के और एक चौकोर 2 by 2 माप का)।

3 by 3 का एक चौकोर बनाओ। इसमें कितने चौकोर दिखाई देते हैं?

अब 4 by 4 के चौकोर के साथ भी ऐसा ही करके देखो। क्या तुम्हें चौकोरों की संख्याओं में कोई पैटर्न नजर आता है?

अब 2 by 3 के एक आयत के साथ भी ऐसा ही करके देखो।

इसमें कितने चौकोर बनते हैं? 3 by 4 के एक आयत के साथ भी यही प्रयास करके देखो।

चित्र 15 देखो।


चित्र 15

5 by 5 के बिन्दुओं वाले एक क्षेत्र में अलग–अलग माप के कितने चौकोर बन सकते हैं?

(बच्चों को इसमें से कम से कम 6 चौकोर ढूँढ़ने में सक्षम होना चाहिए। यहाँ अलग–अलग माप के 8 चौकोर बनते हैं।)

चित्र 16 देखो।

इस चौकोर की बाहरी रेखा पर 8 बिन्दु हैं और 1 बिन्दु चौकोर के अन्दर है।

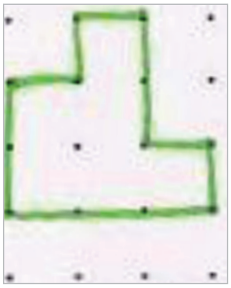
क्या तुम एक ऐसा चौकोर बना सकते हो जिसकी बाहरी रेखा पर 12 बिन्दु हों और 4 बिन्दु अन्दर हों? क्या तुम एक ऐसा चौकोर बना सकते हो जिसकी बाहरी रेखा पर 4 और अन्दर 1 बिन्दु हो?


चित्र 16

क्या तुम एक ऐसा चौकोर बना सकते हो जिसके अन्दर केवल 2 बिन्दु हों? अन्दर केवल 5 बिन्दु हों?

क्या तुम एक ऐसा त्रिभुज बना सकते हो जिसके अन्दर 1 बिन्दु हो? ऐसे कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं जिनके अन्दर केवल 1 बिन्दु हो?

चित्र 17 देखो।


चित्र 17

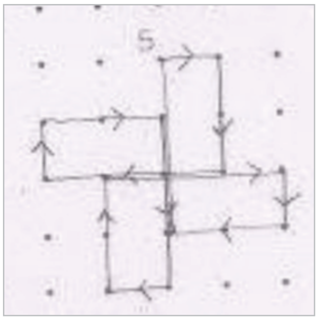
क्या तुम एक ऐसा चित्र बना सकते हो जिसका क्षेत्रफल तो इतना ही हो लेकिन परिमाप ज्यादा हो?

क्या तुम एक ऐसा चित्र बना सकते हो जिसका क्षेत्रफल चित्र में दी गई आकृति के बराबर हो लेकिन परिमाप इससे कम हो?

क्या तुम एक ऐसा चित्र बना सकते हो जिसका परिमाप इसके बराबर हो लेकिन क्षेत्रफल इससे ज्यादा हो?

क्या तुम एक ऐसा चित्र बना सकते हो जिसका परिमाप बराबर हो लेकिन क्षेत्रफल इससे कम हो?

चित्र 18 देखो।


चित्र 18

एक चींटी द्वारा बनाए गए इस घुमावदार रास्ते को देखो। वह एक कदम में 1 इकाई की लम्बाई तय करती है फिर 90 अंश से दाईं ओर मुड़ जाती है। फिर 2 इकाई लम्बाई तय करती है और 90 अंश से दाईं ओर मुड़ जाती है। फिर 3 इकाई लम्बाई तय करती है और 90 अंश से दाईं ओर मुड़ जाती है और फिर 1 इकाई लम्बाई तय करती है.....

1, 2, 3 इकाई की दूरी तय करके चींटी वापिस अपने शुरुआती स्थान पर पहुँच जाती है।

यदि वह 1, 3 और फिर 2 इकाई की दूरी तय करे तो भी क्या वह अपने शुरुआती स्थान पर पहुँच जाएगी? और यदि 3, 1, 2 इकाई की दूरी तय करे तो भी अपने शुरुआती स्थान पर पहुँच पाएगी?

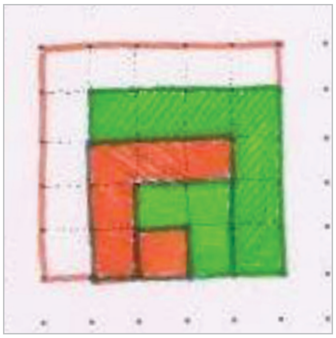
अब खुद चींटी का एक रास्ता बनाओ और देखो कि वह अपने शुरुआती स्थान पर पहुँच पाती है या नहीं।

यदि चींटी शुरुआत से लेकर आखिर तक केवल 1 संख्या ही इस्तेमाल करे तो यह चित्र कैसा होगा?

यदि वह शुरुआत से लेकर आखिर तक केवल 2 संख्याएँ ही इस्तेमाल करे तो यह चित्र कैसा होगा?

यदि चींटी 4 संख्याएँ इस्तेमाल करे तो यह चित्र कैसा होगा?

चित्र 19 देखो।



चित्र 19

जिस तरह से यह चित्र बढ़ रहा है उसे देखो।

अपने बिन्दुओं वाले कागज पर इसकी नकल करो और पाँचवाँ व छठा पैटर्न बनाओ।

पाँचवाँ पैटर्न बनाने के लिए तुमने कितने चौकोर जोड़े?

छठा पैटर्न बनाने के लिए तुम्हें कितने चौकोर जोड़ने पड़े?

पहले स्तर पर कितने इकाई चौकोर हैं?

दूसरे स्तर पर कुल मिलाकर कितने इकाई चौकोर हैं?

तीसरे स्तर पर कुल मिलाकर कितने इकाई चौकोर हैं?

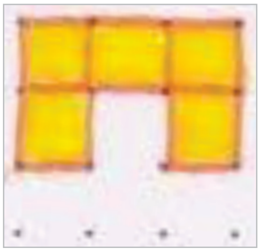
चौथे स्तर पर कुल मिलाकर कितने इकाई चौकोर हैं?

पाँचवें स्तर पर कुल मिलाकर कितने इकाई चौकोर हैं?

क्या तुम्हें कोई पैटर्न नजर आता है?

चित्र 20 देखो।

5 चौकोरों को हम कितने तरीकों से एक साथ जमा सकते हैं? एक तरीका तो चित्र में दिखाया गया है। दो चौकोरों की एक किनार साझा होनी चाहिए। ऐसी आकृतियों को 'पेंटोमिनो' कहते हैं।

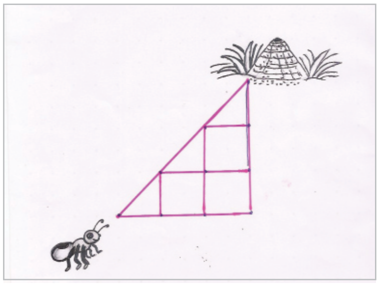


चित्र 20

चित्र 21 देखो।

चित्रों की ओर देखो।

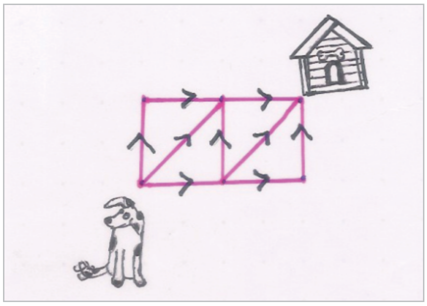
चींटी के अपने घोंसले तक वापिस आने के कितने रास्ते हो सकते हैं?



चित्र 21

चित्र 21 क देखो।

कुत्ता अपने घर तक कितने रास्तों से लौट सकता है?

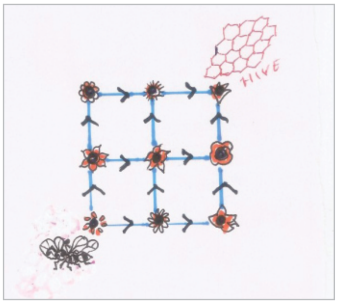


चित्र 21 क

चित्र 21 ख देखो।

मधुमक्खी एक कोने से शुरू करके अपनी शुरुआती जगह पर वापिस पहुँचने से पहले ज्यादा से ज्यादा बिन्दुओं (फूलों) से होकर गुजरने की कोशिश कर रही है।

वह कितने फूलों से होकर गुजर सकती है? आप इसी तरह के और कई सवाल खोज व सोच सकते हैं।



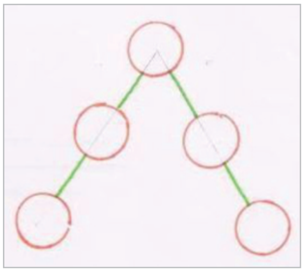
चित्र 21 ख

जादुई जोड़

चित्र 22 देखो।

सामग्री : ऐसे कार्ड जिनमें गोलों को V–आकृति (5 गोलों वाले कार्ड, 7 गोलों वाले कार्ड) में जमाया गया हो। गोलों के बीच लगाने के लिए काउंटर (जिन पर 1 से 10 तक की गिनती लिखी हो)

इन सवालों को हल करना आसान होता है यदि काउंटर पर संख्याएँ लिखी हों। बच्चों को चित्रों की नकल करने या सवालों को हल करते समय संख्याएँ लिखने और उन्हें मिटाने



चित्र 22

की जरूरत नहीं होती। हालाँकि वे अपने जवाबों का लेखा–जोखा रख सकते हैं।

1 से 5 तक की हर संख्या को V–आकृति के कार्ड में इस तरह लगाएँ कि V की दोनों भुजाओं का जोड़ एक समान हो।

ऐसा करने के कितने तरीके हो सकते हैं?

क्या तुम्हारे सभी जवाबों में कोई चीज एक–जैसी है?

क्या तुम बता सकते हो कि ऐसा क्यों है? संख्याओं के जो जोड़े भुजाओं पर रखे जाते हैं उनके बारे में तुम्हारा क्या कहना है?

अब 2 से 6 तक की संख्याओं को V–आकृति के कार्डों में इस तरह जमाओ कि V की दोनों भुजाओं का जोड़ एक समान हो।

ऐसा करने के कितने तरीके हो सकते हैं?

क्या इस बार भी तुम्हारे जवाब पहली बार की तरह हैं?

क्या इन जवाबों के बीच भी वैसे ही सम्बन्ध हैं जैसे कि पहली स्थिति में थे?

अब 5 क्रमागत संख्याओं के अन्य जोड़ों के साथ भी ऐसा ही करके देखो।

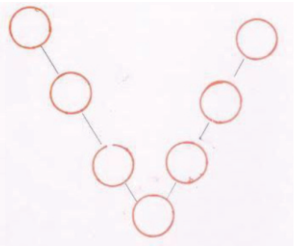
क्या तुम फटाफट वह संख्या बता सकते हो जो सबसे नीचे के गोले में, जहाँ दोनों भुजाएँ मिलती हैं, रखी जानी चाहिए?

5 क्रमागत सम संख्याओं व 5 क्रमागत विषम संख्याओं के साथ भी ऐसा ही करके देखो।

यहाँ चार गोलों की भुजाओं वाला एक V कार्ड दिया गया है।

चित्र 23 देखो।

1 से लेकर 7 तक की हर संख्या को V–आकृति के कार्डों में इस तरह लगाओ कि V की दोनों भुजाओं का जोड़ एक समान हो।



चित्र 23

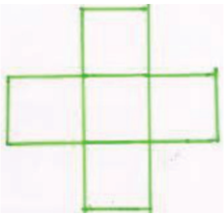
सम संख्या (4, 5.....) से शुरू होने वाली सात क्रमागत संख्याओं के समूह के साथ ऐसा ही करने की कोशिश करो।

अब विषम संख्या (7, 8, 9...) से शुरू होने वाली सात क्रमागत संख्याओं के समूह के साथ भी यही कोशिश करो।

अब इसी अभ्यास को किसी नए डिजाइन के साथ करने की कोशिश करो। तुम एक चौकोर कागज में इस सबका लेखा–जोखा रख सकते हो।

चित्र 24 देखो।

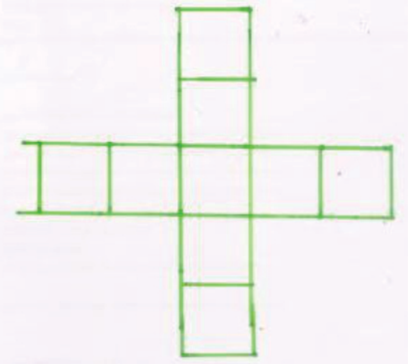
1 से 5 तक की सभी संख्याओं को जोड़–आकृति के कार्ड (5 चौकोर वाले) में इस तरह लगाओ कि पंक्ति और स्तम्भ का जोड़ एक समान हो।



चित्र 24

चित्र 25 देखो।

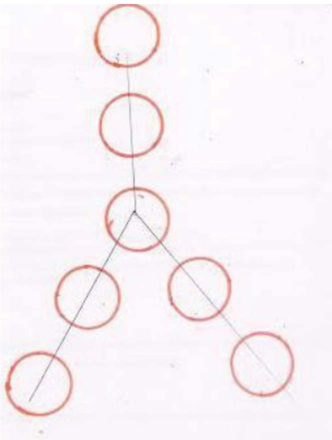
1 से 9 तक की सभी संख्याओं को जोड़–आकृति के कार्ड (9 चौकोर वाले) में इस तरह जमाओ कि जोड़ की चारों भुजाओं का योगफल एक समान हो। ऐसा करने के कितने तरीके हो सकते हैं?



चित्र 25

चित्र 26 देखो।

1 से 7 तक की संख्याओं को किस तरह जमाएँ कि तीनों भुजाओं का जोड़ एक समान हो?

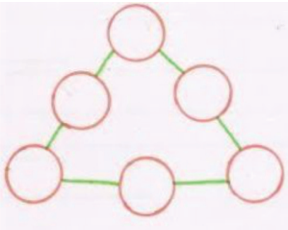


चित्र 26

चित्र 27 देखो।

हर भुजा में 1 से लेकर 6 तक की संख्याओं को जमाओ। त्रिभुज की हर भुजा का कुल जोड़ 9 होना चाहिए।

क्या तुम संख्याओं को इस तरह जमा सकते हो कि सभी भुजाओं का कुल जोड़ 10 हो? और इस तरह कि कुल जोड़ 11 हो?



चित्र 27

चित्र 28 देखो।

सामग्री : गोलों वाले कार्ड जिनमें तीन गोले हों।

क्या तुम गोलों में तीन अलग–अलग ऐसी संख्याएँ रख सकते हो कि संख्याओं के हर जोड़े के बीच का अन्तर एक विषम संख्या हो?

क्या तुम गोलों में तीन अलग–अलग ऐसी संख्याएँ रख सकते हो कि संख्याओं के हर जोड़े के बीच का अन्तर एक सम संख्या हो? हर स्थिति में संख्याओं के जोड़ों के योग के बारे में तुमने क्या देखा?

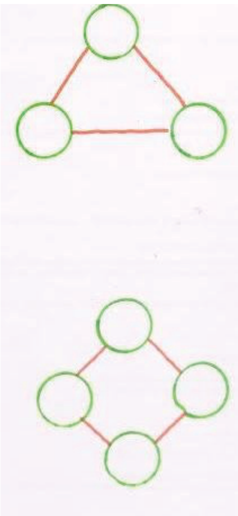
अब 4 गोलों वाले कार्ड के साथ भी यही करने का अभ्यास करो।

क्या 4 अलग–अलग संख्याओं को गोलों में इस तरह रखा जा सकता है कि सभी पड़ोसी संख्याओं के जोड़ों के बीच का अन्तर विषम संख्याएँ हों?

क्या 4 अलग–अलग संख्याओं को गोलों में इस तरह रखा जा सकता है कि सभी पड़ोसी संख्याओं के जोड़ों के बीच अन्तर सम संख्याएँ हों?

क्या तुम बता सकते हो कि ऐसा क्यों है?

अब 5 गोलों वाले कार्डों के साथ भी यही करने का अभ्यास करो। तुम्हें क्या दिखाई देता है?



चित्र 28

टूथपिक वाले सवाल

सामग्री : समान माप की टूथपिक

कौशल समूह : तर्क कौशल को विकसित करना और स्थानिक कौशलों का अभ्यास करना

टूथपिक्स से बनाना :

2 टूथपिक इस्तेमाल कर तुम कितने समकोण बना सकते हो?

क्या तुम दो टूथपिकों को आड़े या तिरछे में इस तरह जमा सकते हो कि 3 अलग–अलग कोण बनें? 6 टूथपिक लो। क्या तुम इससे एक सितारे की आकृति बना सकते हो?

टूथपिक्स हटाना या एक जगह से दूसरी जगह ले जाना:

चित्र 29 देखो।

क्या तुम इस तरह 2 टूथपिक हटा सकते हो कि केवल दो चौकोर बचे रह जाएँ?



चित्र 29

चित्र 30 देखो।

क्या तुम 4 टूथपिकों को इधर–उधर ले जाकर छह त्रिभुज बना सकते हो?



चित्र 30

कथन सही करो :

क्या तुम सभी स्थितियों में केवल एक टूथपिक को इधर–उधर ले जाकर नीचे लिखे कथनों को सही कर सकते हो?

XI – V = IV, X + V = IV, XIV – V = XX, L + L = L

टूथपिक और इबारत वाले सवाल :

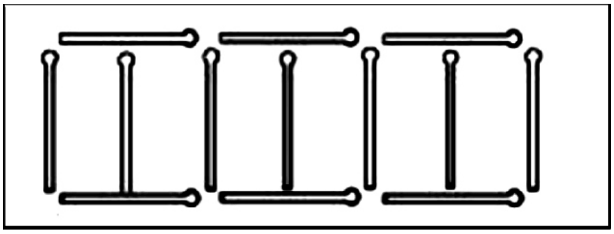
मैंने 50 टूथपिक इस्तेमाल कर कुछ चौकोर और त्रिभुज बनाए। कोई भी दो आकृतियाँ आपस में छूती नहीं है।

मैंने कुल मिलाकर 15 आकृतियाँ बनाईं।

मैंने कुल कितने चौकोर बनाए?

चित्र 31 देखो।

एक किसान ने 13 टूथपिक इस्तेमाल कर भेड़ों के एक जैसे 6 बाड़ों का एक नमूना तैयार किया। पर उसमें से एक टूथपिक टूट गई। केवल 12 टूथपिक इस्तेमाल कर दिखाओ कि कैसे किसान अभी भी एक जैसे 6 बाड़ों का नमूना बना सकता है।



चित्र 31

टूथपिक्स से पैटर्न

चित्र 32 देखो।

टूथपिक से बने चौकौरों को देखो।

1 by 1 का चौकोर बनाने के लिए तुम्हें कितनी टूथपिक की जरूरत होगी?

2 by 2 का चौकोर बनाने के लिए तुम्हें कितनी टूथपिक की जरूरत होगी?

3 by 3 का चौकोर बनाने के लिए तुम्हें कितनी टूथपिक की जरूरत होगी?

4 by 4 का चौकोर बनाने के लिए तुम्हें कितनी टूथपिक की जरूरत होगी?

क्या तुम्हें संख्याओं मे कोई पैटर्न नजर आता है?



चित्र 32

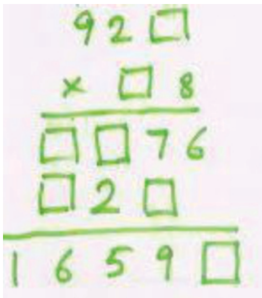
लापता अंक

चित्र 33, 34, 35, 36, 37, 38 देखो।

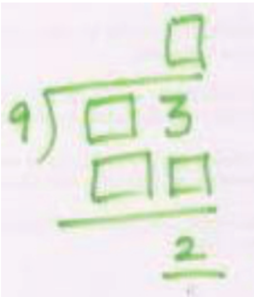
खाली जगहों में कौन–सी संख्याएँ आएँगी?



चित्र 33



चित्र 34



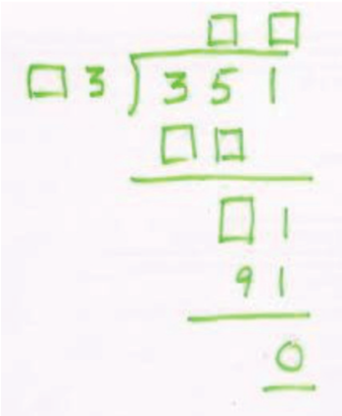
चित्र 35



चित्र 36



चित्र 37



चित्र 38

स्रोत :

- www.nrich.org
- James L. Overholt, Laurie Kincheloe (2010), Education
- An ATM Activity Book – Association of Teachers of Mathematics
- Teachers Resource Information Pack – Hampshire



पद्‌मप्रिया शिराली

पद्‌मप्रिया शिराली ऋषिवैली स्कूल, आन्ध्रप्रदेश के कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर में 1983 से काम कर रही हैं। वे गणित,कम्प्यूटर, भूगोल,अर्थशास्त्र, पर्यावरण विज्ञान तथा तेलगु भाषा का अध्यापन करती रहीं हैं। आजकल वे आउटरीच कार्यक्रम के तहत एस.सी.ई.आर.टी., आन्ध्रप्रदेश के साथ उनके पाठ्यक्रम सुधार तथा प्राथमिक स्तर की गणित पाठ्यपुस्तकों के निमार्ण में संलग्न हैं। 1990 के दशक में उन्होंने जाने–माने गणितज्ञ श्री पी.के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे ऋषिवैली स्कूल की मल्टीग्रेड लर्निंग प्रोग्राम टीम का हिस्सा भी रही हैं, जिसे 'स्कूल इन ए बाक्स' के नाम से जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर,ऋषिवैली की संयुक्त पत्रिका At Right Angles (a resource for school mathematics) Volume 4,N0.3 November 2015 में प्रकाशित Teaching Thinking Skills का हिन्दी अनुवाद है। **अनुवाद** : कविता तिवारी **सम्पादन** : राजेश उत्साही